JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **45**, 11–18 (1985)

Kriterien für die asymptotische Approximation durch Dirichletsche Reihen

LOTHAR HOISCHEN

Mathematisches Institut der Universität Giessen, D-6300 Giessen, West Germany

Communicated by R. Bojanic

Received November 28, 1983

Es bezeichne (λ_n) im weiteren stets eine Folge verschiedener reeller Zahlen λ_n $(n=0, 1, 2,...)$ mit $0=\lambda_0<\lambda_n (n=1, 2,...)$.

In Analogie zu den Approximationseigenschaften, die sich für ganze Funktionen nach dem Satz von Carleman ergeben, sagen wir, daß die Folge (λ_n) die asymptotische Approximationseigenschaft (A) besitzt, falls es zu jeder auf $(0, \infty)$ stetigen Funktion f, für die $\lim_{s\to\infty} f(s)$ existiert, und zu jeder auf $(0, \infty)$ positiven, stetigen Funktion h mit $\lim_{s\to\infty} h(s)>0$ eine für alle $s>0$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe $g(s)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$ gibt mit

$$|f(s)-g(s)|<h(s) \qquad (s>0).$$

Nach [3, S. 17] gilt

SATZ 1. *Jede Folge* (λ_n) *mit* $\sum_{n=1}^{\infty} (1/\lambda_n)=\infty$ *und* $\lambda_{n+1}-\lambda_n \geqslant c>0$ *hat die Eigenschaft* (A).

Ein entsprechender Satz wurde ferner in [4] für ganze Dirichletsche Reihen hergeleitet.

Um alle Folgen (λ_n) mit der Eigenschaft (A) zu bestimmen, betrachten wir eine nach Mikusiński benannte Identitätseigenschaft und sagen:

Eine Folge (λ_n) hat die Eigenschaft (M), wenn für jedes $q>0$ aus

$$\int_0^{\infty} e^{-t\lambda_n}\, d\alpha(t)=\mathcal{O}(e^{-q\lambda_n}) \qquad (n\to\infty), \qquad \int_0^{\infty} |d\alpha(t)|<\infty$$

für eine normierte Belegungsfunktion α stets $\alpha(t)=0$ $(0\leqslant t\leqslant q)$ folgt. Dabei heißt α normiert, wenn α in jedem $t>0$ linksseitig stetig ist mit $\alpha(0)=0$.

In [5] wurde folgender Satz bewiesen, den wir in der nach [2, S. 10] umgeformten Gestalt übernehmen.

0021-9045/85 $3.00

SATZ 2. *Jede Folge* (λ_n) *mit* $\sum_{n=1}^{\infty}(1/\lambda_n)=\infty$ *und* $\lambda_{n+1}-\lambda_n \geqslant c>0$ *hat die Eigenschaft* (M).

Im Falle $\lambda_n=n$ wurde ferner in [1] ein funktionentheoretischer Beweis für Satz 2 gegeben.

Die Eigenschaft (M) ist offensichtlich stärker als die Forderung, daß $\int_0^\infty e^{-t\lambda_n}\,d\alpha(t)=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$, $\int_0^\infty |d\alpha(t)|<\infty$ für normiertes α stets $\alpha(t)=0$ $(t\geqslant 0)$ impliziert, wobei letzteres nach dem Satz von Müntz [6, S. 336] mit $\sum_{n=1}^{\infty}(1/\lambda_n)=\infty$ äquivalent ist.

Es stellt sich daher die Frage nach Approximationseigenschaften, die zu (M) äquivalent sind. Um in dieser Arbeit einen Zusammenhang zwischen (A) und (M) zu untersuchen, bilden wir zu jeder Folge (λ_n) die Klasse G aller verallgemeinerter Polynome $P(s)=\sum_{\nu=0}^{N} a_\nu e^{-s\lambda_\nu}$ und betrachten folgende weitere Approximationseigenshaft:

Wir sagen, daß die Folge (λ_n) die Eigenschaft (B) besitzt, wenn zu jeder auf $[0,q]$, $q>0$ stetigen Funktion f mit $f(q)=0$ und zu jedem $\varepsilon>0$ ein $P\in G$ existiert mit

$$|f(s)-P(s)|<\varepsilon \qquad (s\in[0,q]) \qquad \text{und} \qquad \|P\|_q<\varepsilon,$$

wobei $\|P\|_q=\sum_{\nu=0}^{N}|a_\nu|\,e^{-q\lambda_\nu}$ ist.

Wir beweisen

SATZ 3. *Für eine Folge* (λ_n) *gilt die Eigenschaft* (A) *genau dann, wenn* (M) *gilt und ferner genau dann, wenn* (B) *gilt. Das heißt* (A), (M) *und* (B) *sind äquivalent.*

Da nach [5, S. 52] eine auf $[\frac{1}{2},1]$ stetige, nicht identisch verschwindende Funktion f mit

$$\int_{1/2}^{1} x^{n^2} f(x)\,dx=0 \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

existiert, zeigt man mit den Überlegungen aus [5, S. 52] leicht, daß es Folgen (λ_n) mit $\sum_{n=1}^{\infty}(1/\lambda_n)=\infty$, $\lambda_n\to\infty$ gibt, für die (M) und somit nach Satz 3 auch (A) und (B) nicht gelten.

Als Folgerung aus Satz 3 erhält man außerdem durch Satz 1 einen neuen Beweis von Satz 2 und durch Satz 2 einen neuen Beweis von Satz 1.

Beweis zu Satz 3. Wir zeigen die folgenden drei Schritte:

(a) (A) impliziert (M),

(b) (M) impliziert (B),

(c) (B) impliziert (A).

Beweis zu (a). Ist (A) für (λ_n) vorausgesetzt, dann folgt für eine

Teilfolge $\lambda_{n_i} \to \infty$ $(n_i \to \infty)$. Denn im Falle $0 \leqslant \lambda_n < k$ mit konstantem k gilt für jede auf $(0, \infty)$ absolut konvergente Reihe $g(s) = \sum_0^\infty a_n e^{-s\lambda_n}$ auch $\sum_0^\infty |a_n| < \infty$, so daß sich dann für $s \to +0$ unbeschränkte Funktionen f nicht beliebig gut durch das beschränkte $g(s)$ approximieren lassen. Es sei

$$\left| \int_0^\infty e^{-t\lambda_n} \, d\alpha(t) \right| \leqslant K e^{-q\lambda_n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad \int_0^\infty |d\alpha(t)| < \infty \tag{1}$$

für ein $q > 0$ mit $K < \infty$ und mit normiertem α. Zum Beweis von (M) zeigen wir zunächst indirekt, daß es ein $d \in (0, q)$ gibt mit

$$\alpha(t) = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant d). \tag{2}$$

Aus (1) folgt wegen $\lambda_{n_i} \to \infty$ sehr leicht, daß α in $t = 0$ stetig ist. Falls ein $d \in (0, q)$ mit (2) nicht existiert, können wir daher zu jedem $\beta \in (0, q)$ ein abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subset (0, \beta)$ mit

$$\int_a^b d\alpha(t) \neq 0 \tag{3}$$

bestimmen, wobei a und b noch wegen der linksseitigen Stetigkeit von α als Stetigkeitspunkte von α gewählt werden können.

Wir bilden nun nach (3) sukzessiv zu jedem $m = 1, 2, \ldots$ Intervalle $[a_m, b_m] \subset (0, q)$ und Intervalle $[c_m, d_m] \subset (0, q)$ sowie stetige Funktionen w_m auf $[0, \infty)$ mit $w_m(t) = 0$ außerhalb von $[c_m, d_m]$ und bestimmen schließlich noch Zahlen $x_m > 0$ in folgender Weise:

Für $m = 1$ sei $0 < c_1 < a_1 < b_1 < d_1 < q$; $w_1(t) = 0$ auf $[0, \infty)$ sowie $x_1 > 0$ beliebig.

Sind $[a_i, b_i]$, $[c_i, d_i]$, w_i sowie $x_i > 0$ für $i = 1, 2, \ldots, m-1$ $(m = 2, 3, \ldots)$ schon bestimmt, dann wählen wir zunächst $[a_m, b_m]$ mit $b_m < 1/m$, $0 < a_m < b_m < c_{m-1}$ und $b_m < x_{m-1}$ nach (3) mit $\int_{a_m}^{b_m} d\alpha(t) \neq 0$. Es sei dann k_m eine Zahl mit

$$k_m \int_{a_m}^{b_m} d\alpha(t) > m - \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^{m-1} w_i(t) \right] d\alpha(t). \tag{4}$$

Wir bilden nun $[c_m, d_m]$ mit $0 < c_m < a_m < b_m < d_m < c_{m-1}$ und $d_m < x_{m-1}$ und wählen die auf $[0, \infty)$ stetige Funktion w_m mit $w_m(t) = k_m$ auf $[a_m, b_m]$, $w_m(t) = 0$ außerhalb von $[c_m, d_m]$ und $w_m(t)$ linear auf $[c_m, a_m]$ und $[b_m, d_m]$.

Da a_m, b_m Stetigkeitspunkte von α sind, können c_m und d_m hierbei so nah an a_m bzw. b_m gelegt werden, daß nach (4) gilt

$$\int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^{m} w_i(t) \right] d\alpha(t) > m.$$

Schließlich bestimmen wir bei Beachtung der Stetigkeit der w_i noch ein $x_m > 0$ mit

$$\int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^{m} w_i(x_m + t)\right] d\alpha(t) > m. \tag{5}$$

Wir setzen

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(t). \tag{6}$$

Die Reihe (6) konvergiert wegen $w_m(t) = 0$ $(t \geqslant d_m)$ und $d_m \to 0$ für alle $t > 0$, und f ist auf $(0, \infty)$ stetig mit $f(t) = 0$ $(t \geqslant d_2)$. Aus $d_i < x_m$ $(i > m)$ folgt $w_i(x_m + t) = 0$ $(t \geqslant 0)$ für alle $i > m$ $(m = 2, 3,\dots)$, so daß wir $f(x_m + t) = \sum_{i=1}^{m} w_i(x_m + t)$ für $t \geqslant 0$ nach (6) und

$$\int_0^\infty f(x_m + t)\, d\alpha(t) > m \qquad (m = 2, 3,\dots) \tag{7}$$

aus (5) erhalten. Nach (A) und (7) existiert eine für $t > 0$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-t\lambda_n}$ mit

$$\int_0^\infty g(x_m + t)\, d\alpha(t) > m \qquad (m = 2, 3,\dots). \tag{8}$$

Wir erhalten aber

$$\int_0^\infty g(x_m + t)\, d\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-x_m\lambda_n} \int_0^\infty e^{-t\lambda_n}\, d\alpha(t), \tag{9}$$

wobei die Vertauschung von Summe und Integral wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, e^{-x_m\lambda_n} < \infty, \qquad \int_0^\infty |d\alpha(t)| < \infty$$

erlaubt ist. Aus (1) und (9) folgt somit

$$\left|\int_0^\infty g(x_m + t)\, d\alpha(t)\right| \leqslant K \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, e^{-q\lambda_n} = k < \infty \qquad (m = 2, 3,\dots),$$

was ein Widerspruch zu (8) ist. Damit ist die Existenz eines $d \in (0, q)$ mit (2) bewiesen.

Es sei $c = \sup d$, wobei das Supremum über alle $d \in (0, q)$ mit (2) gebildet wird. Zu zeigen ist noch $c = q$.

Wäre $0<c<q$, dann folgt aus $\alpha(t)=0$ $(0\leqslant t<c)$ nach (1) bei Multiplikation mit $e^{c\lambda_n}$

$$\left|\int_0^{\varepsilon} e^{-t\lambda_n}\, d\alpha(t+c)\right| \leqslant K e^{-(q-c)\lambda_n} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Nach der obigen Beweisführung existiert dann wieder ein $d\in(0, q-c)$ mit $\alpha(t)=0$ $(c\leqslant t\leqslant c+d<q)$, was ein Widerspruch zur Definition von c ist. Damit ist (a) bewiesen.

Beweis zu (b). Es gelte (M) für die Folge (λ_n), und wir beweisen (B) funktionalanalytisch.

Zu jedem $q>0$ bezeichne W_q die Menge aller geordneten Tupel $w=(f, P)$, wobei f eine auf $[0, q]$ stetige Funktion mit $f(q)=0$ und $P\in G$ mit $P(q)=0$ sei.

Ferner bilden wir als Untermenge von W_q die Klasse U_q aller $w=(P, P)$ mit $P\in G$ und $P(q)=0$.

Mit der Norm

$$\|w\| = \max_{t\in[0,q]} |f(t)| + \|P\|_q$$

ist W_q ein linearer normierter Raum mit dem linearen Unterraum U_q. Zum Beweis von (B) genügt es $\bar{U}_q = W_q$ zu zeigen, wobei $\bar{U}_q$ die abgeschlossene Hülle von U_q bezüglich W_q bei obiger Norm ist.

Es sei nun F ein beschränktes lineares Funktional auf W_q mit $F(P, P)=0$ für alle $(P, P)\in U_q$. Dann ist $F(w)=0$ für alle $w=(f, P)\in W_q$ zu beweisen [6; S. 114].

Setzt man $w=(f, P)=(f, P_0)+(f_0, P)$ mit f_0 als Nullfunktion auf $[0, q]$ und $P_0\in G$ als Nullpolynom, so folgt aus der Linearität von F für alle $w=(f, P)\in W_q$

$$F(w)=F(f, P_0)+F(f_0, P). \tag{10}$$

Durch $F(f, P_0)$ wird ebenfalls ein beschränktes lineares Funktional auf der Klasse der auf $[0, q]$ stetigen Funktionen f, $f(q)=0$ mit der Norm $\|f\|=\max_{t\in[0,q]}|f(t)|$ gebildet, für das nach bekanntem Darstellunssatz [6, S. 139] (bei Beachtung des Satzes von Hahn Banach) die Darstellung gilt

$$F(f, P_0)=\int_0^q f(t)\, d\alpha(t), \qquad \int_0^q |d\alpha(t)| < \infty. \tag{11}$$

Die Funktion α in (11) kann als normiert angenommen werden, da auch

$\alpha(q)$ wegen $f(q)=0$ ohne Veränderung der Werte von $F(f, P_n)$ in (11) durch $\alpha(q-0)$ ersetzt werden kann. Somit folgt aus (10)

$$F(w)=\int_0^q f(t)\,d\alpha(t)+F(f_0, P) \qquad (w\in W_q) \tag{12}$$

Speziell für $f(t)=P(t)=e^{-t\lambda_n}-e^{-q\lambda_n}$ $(n=0, 1, 2,\dots)$ ergibt sich wegen $F(P, P)=0$ aus (12)

$$\int_0^q e^{-t\lambda_n}\,d\alpha(t)=e^{-q\lambda_n}\int_0^q d\alpha(t)-F(f_0, P)$$

mit $|F(f_0, P)|\leqslant \|F\|\,\|P\|_q = 2\,\|F\|\,e^{-q\lambda_n}$.

Daher ist $\int_0^q e^{-t\lambda_n}\,d\alpha(t)=O(e^{-q\lambda_n})$ $(n\to\infty)$, und wir erhalten $\alpha(t)=0$ $(0\leqslant t\leqslant q)$ aus (M). Somit folgt aus (12)

$$F(w)=F(f_0, P) \qquad (w\in W_q), \tag{13}$$

so daß $F(f, P)$ und $F(P, P)$ nach (13) für alle $(f, P)\in W_q$ dieselben Werte haben. Wegen $F(P, P)=0$ folgt daraus $F(w)=0$ für alle $w\in W_q$, womit (b) bewiesen ist.

Beweis zu (c). Es gelte (B) für die Folge (λ_n), und es sei f stetig und h positiv und stetig auf $(0, \infty)$ mit $h(s)\to k>0$ $(s\to\infty)$. Zum Beweis von (A) darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(s)\to 0$ $(s\to\infty)$ und h als monoton wachsend auf $(0, \infty)$ angenommen werden. Wir wählen $q_m>0$ mit $q_{m+1}<q_m$ $(m=1, 2,\dots)$ und $q_m\to 0$ $(m\to\infty)$, wobei q_1 bestimmt wird mit

$$|f(s)|<h(q_1)/4 \qquad (s\geqslant q_1). \tag{14}$$

Es darf ferner angenommen werden, daß

$$h(q_{m+1})<h(q_m)/2 \qquad (m=1, 2,\dots). \tag{15}$$

Wir bilden sukzessiv Polynome $P_m\in G$ $(m=1, 2,\dots)$ nach (B) in folgender Weise:

Es sei $P_1(s)=0$ für alle s. Sind nun die Polynome $P_l(s)$ $(l=1, 2,\dots, m-1)$ $(m=2, 3,\dots)$ bereits bestimmt, so setzen wir

$$d_{m-1}=f(q_{m-1})-\sum_{l=1}^{m-1}P_l(q_{m-1}). \tag{16}$$

Dann ist $f(s)-\sum_{l=1}^{m-1} P_l(s)-d_{m-1}=0$ für $s=q_{m-1}$. Wir können daher nach (B) ein Polynom $Q_m \in G$ so wählen, daß gilt

$$\left|f(s)-\sum_{l=1}^{m-1} P_l(s)-d_{m-1}-Q_m(s)\right|<\frac{h(q_m)}{4} \qquad (s\in[q_m, q_{m-1}]) \quad (17)$$

und

$$\|Q_m\|_{q_{m-1}}<h(q_m)/4. \qquad (18)$$

Mit

$$P_m(s)=Q_m(s)+d_{m-1}, \qquad T_m(s)=\sum_{l=1}^{m} P_l(s) \qquad (19)$$

erhalten wir daher aus (14) und (17)

$$|f(s)-T_m(s)|<h(q_m)/4 \qquad (s\in[q_m, q_{m-1}];\ m=1, 2,\ldots), \qquad (20)$$

wobei $[q_m, q_{m-1}]$ im Falle $m=1$ durch $[q_1, \infty)$ zu ersetzen ist. Da $d_m=f(q_m)-T_m(q_m)$ nach (16) und (19), so folgt aus (20)

$$|d_m|<h(q_m)/4 \qquad (m=1, 2,\ldots). \qquad (21)$$

Aus (18), (19) und (21) ergibt sich

$$\|P_m\|_{q_{m-1}}<\tfrac{1}{4}[h(q_m)+h(q_{m-1})] \qquad (m=2, 3,\ldots). \qquad (22)$$

Wir setzen

$$g(s)=\sum_{m=1}^{\infty} P_m(s). \qquad (23)$$

Die Reihe in (23) konvergiert nach (15) und (22) für alle $s\in(0, \infty)$ wegen $|P_m(s)|\leqslant\|P_m\|_{q_{m-1}}$ für $s\geqslant q_{m-1}$. Ist nun $s\in[q_m, q_{m-1}]$ $(m=2, 3,\ldots)$ oder $s\in[q_1, \infty)$ im Falle $m=1$, so erhalten wir nach (15), (20), (22) und (23)

$$\begin{aligned}|f(s)-g(s)|&\leqslant|f(s)-T_m(s)|+\sum_{l=m+1}^{\infty}|P_l(s)|\\ &<\frac{h(q_m)}{4}+\frac{1}{4}\sum_{l=m+1}^{\infty}[h(q_l)+h(q_{l-1})]\\ &<\frac{h(q_m)}{4}+\frac{3}{8}\sum_{l=m+1}^{\infty}h(q_{l-1})<h(q_m)\leqslant h(s),\end{aligned}$$

woraus die gewünschte asymptotische Approximationseigenschaft folgt.

Es muß noch gezeigt werden, daß $g(s)$ aus (23) eine für $s>0$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe darstellt. Ist $P_m(s)=\sum_{\nu=0}^{N_m} a_\nu^{(m)} e^{-s\lambda_\nu}$, so folgt aus (15) und (22)

$$\sum_{\nu=0}^{N_m} |a_\nu^{(m)}| e^{-s\lambda_\nu} \leqslant \frac{k}{2^m} \qquad (s \geqslant q_{m-1}, m=2, 3,...)$$

mit einer Konstanten k und somit

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{N_m} |a_\nu^{(m)}| e^{-s\lambda_\nu} < \infty \qquad (s>0).$$

Durch Umordnung und Zusammenfassung der $a_\nu^{(m)} e^{-s\lambda_\nu}$ aus allen $P_m(s)$ folgt daher nach (23), daß sich $g(s)$ in eine für $s>0$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe umformen läßt, womit Satz 3 in allen Teilen bewiesen ist.

Literatur

1. A. Birkholc, A proof of Mikusiński theorem on bounded moments, *Bull. Acad. Polon.* **16** (1968), 651–652.
2. K. Harbusch, Einschließungssätze für verallgemeinerte Abel-Matrixverfahren, *Mitt. Math. Sem. Giessen* **122** (1976), 1–59.
3. L. Hoischen, Über die asymptotische Approximation durch analytische Funktionen mit Anwendungen in der Theorie der Integraltransformationen und Limitierungsverfahren, *Mitt. Math. Sem. Giessen* **74** (1967), 1–60.
4. L. Hoischen, Asymptotische Approximation stetiger Funktionen durch ganze Dirichlet-Reihen, *J. Approx. Theory* **3** (1970), 293–299.
5. J. G. Mikusiński and C. Ryll-Nardzewski, A theorem on bounded moments, *Studia Math.* **13** (1953), 51–55.
6. W. Rudin, "Real and Complex Analysis," McGraw-Hill, New York, 1966.